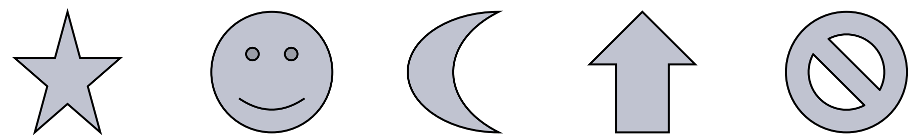
COMBINACIONES, VARIACIONES Y PERMUTACIONES

Material preparado por la Profesora
María Fátima Dos Santos
Escuela de Psicología - UCV

¿Qué son combinaciones y permutaciones?

- Supongamos que tengo 5 elementos en el espacio muestral:



y voy a elegir muestras, cada una compuesta por tres elementos.

- Al hablar de **combinaciones** nos referimos a la cantidad de conjuntos distintos, que difieren en al menos un elemento. Cuatro combinaciones posibles son:

- Una permutación es la variación en el orden de aparición de los elementos de un conjunto. Al permutar la combinación A, conseguimos lo siguiente:

¿Qué son variaciones?

- Utilicemos ahora letras como elementos (A,B,C,D,E) y hagamos todas las combinaciones posibles en grupos de tres:

ABC	ACB	BAC	BCA	CBA
ABD	ADB	BAD	BDA	DBA
ABE	AEB	BAE	BEA	EBA
ACD	ADC	CAE	CDA	DCA
ACE	AEC	CAE	CEA	ECA
ADE	AED	DAE	DEA	EDA
BCD	BDE	CBD	CDB	DCB
BCE	BEC	CBE	CEB	ECB
BDE	BED	DBE	DEB	EDB
CDE	CED	DCE	DEC	EDC

- Vamos a añadir, al lado de cada combinación, todas las permutaciones posibles.
- La suma de todas las combinaciones y todas las permutaciones son las variaciones

¿Cómo se denotan?

- Hay varias nomenclaturas para identificar combinaciones, variaciones y permutaciones. Considerando siempre que m es el número de elementos favorables, y n es el número de elementos disponibles, algunas formas de denotarlo son:

Combinaciones	Permutaciones	Variaciones
C (n,m)	P_m	V (n,m)
nCm		nVm
C $\binom{n}{m}$		V $\binom{n}{m}$
$\binom{n}{m}$ o bien $\binom{m}{n}$		

- Usaremos la notación resaltada en azul.
- Para el caso de las combinaciones C $\binom{5}{3}$ se lee "combinaciones de cinco elementos, tomados en grupos de tres".

¿Cómo calculo probabilidades?

- En general, para saber la cantidad de combinaciones, permutaciones y variaciones de una situación dada, no hace falta elaborarlas. Solo hay que usar la fórmula correspondiente:

$$V\binom{n}{m} = \frac{m!}{(n-m)!}$$

$$C\binom{n}{m} = \frac{m!}{n!(n-m)!}$$

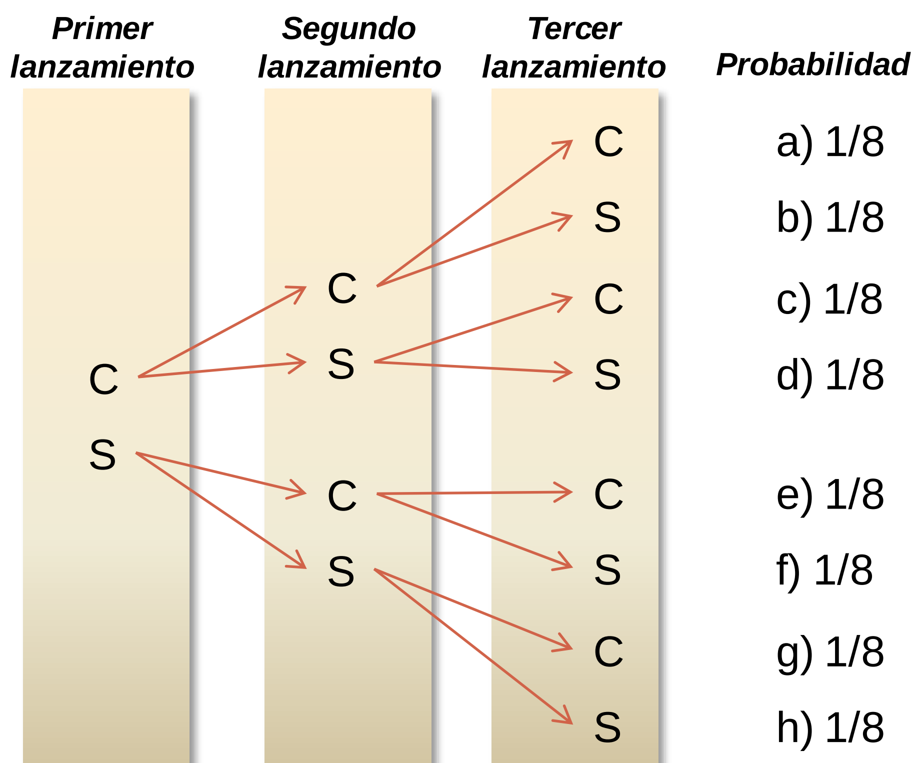
$$P_m = m!$$

PROBABILIDADES BINOMIALES

- Consideremos el más simple de todos los ejercicios de probabilidad: acertar o no un evento. Este tipo de probabilidad de denomina "binomial", porque hay dos alternativas de ocurrencia.
- Un ejemplo muy sencillo es una moneda (cada lanzamiento puede resultar en cara o cruz), pero hay muchas otras alternativas binomiales en la vida: vivir o morir, mudarse o no, ser seleccionado para la universidad o no serlo, etc.
- De hecho, toda probabilidad puede expresarse mediante binomios. En un dado, por ejemplo, hay seis posibles resultados, pero cada alternativa puede reflejarse como un resultado binomial (por ejemplo, probabilidad de sacar 5, que es 1/6, o probabilidad de no sacar 5, que es 5/6).
- En los próximo ejemplo, vamos a abordar un problema de probabilidad binomial. Tomaremos el caso de tres lanzamientos sucesivos de una moneda. Utilizaremos para ello tres enfoques: la Cadena de Markov, el Binomio de Newton o el Triángulo de Pascal.

CADENA DE MARKOV

- Una cadena de Markov es una forma de representación de los resultados de sucesivos eventos aleatorios. (Nota: las cadenas de Markov pueden aplicarse también a probabilidades no binomiales, aunque allí son más complejas).
- Simplemente se van trazando las alternativas de resultado de cada lanzamiento, como se ve a continuación.



- ¿Cuantos eventos cumplirían la condición de lograr dos caras y un sello? El b, el c y el e. Es decir que tres combinaciones cumplen la condición
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos dos caras? Esta condición se cumple en las combinaciones a, b, c y e, por lo tanto la probabilidad es de 4/8, es decir, 1/2.

BINOMIO DE NEWTON

- Si no se requiere conocer cada resultado, sino la cantidad de eventos que cumplen una determinada condición (dos caras, todos sellos, etc), es más corto trabajar con el binomio de Newton.
- En el ejemplo que nos ocupa, el binomio de Newton original es el siguiente (la potencia luego del paréntesis refleja la cantidad de lanzamientos)

$$(C + S)^3$$

- Y al desarrollar la solución, obtenemos lo siguiente:

$$C^3 + 3(C^2S) + 3(CS^2) + S^3$$

- Si compara estos resultados con la cadena de Markov, conseguirá que son idénticos: habiendo ocho secuencias posibles, en una sola de ellas salen tres caras (C^3) en una sola salen tres sellos (S^3) , y las otras seis son combinaciones de caras y sellos.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos dos caras? Allí debemos sumar el término $3(C^2S)$ (que significa que en tres combinaciones se obtienen dos caras y un sello) y el término C^3 (que significa que en sola combinación se obtienen tres caras).

TRIÁNGULO DE PASCAL

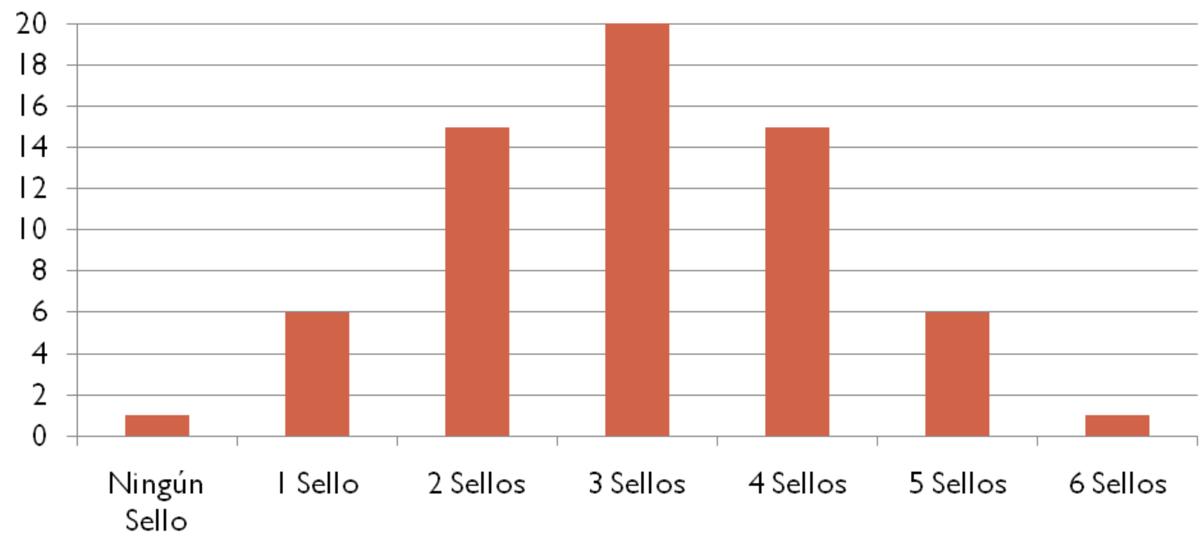
- El triángulo de Pascal presenta en forma condensada los posibles resultados de un experimento aleatorio binomial con diferente número de repeticiones.
- A seguir, reproducimos los resultados para los lanzamientos desde el 1 hasta el 5.
- Al lado de cada línea del triángulo colocamos la notación equivalente en forma de ecuación, lo cual hace más simple entenderlo.

1	C (ó S)
1 1	C + S
1 2 1	$C^2 + CS + S^2$
1 3 3 1	$C^3 + 3(C^2S) + 3(CS^2) + S^3$
1 4 6 4 1	$C^4+4(C^3S) + 6(C^2S^2) + 4(CS^3) + S^4$

- Generar un triángulo de Pascal es muy simple: los tres primeros números (de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha) son 1. De allí en adelante el número se obtiene por la suma de los dos diagonales superiores (por ejemplo, en la línea 5, el 6 se obtiene sumando 3 y 3). El triángulo de Pascal se prolonga infinitamente hacia abajo.
- Para continuar, se requiere que usted obtenga la línea 7 del Triángulo de Pascal y la convierta a la nomenclatura del Binomio de Newton.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

- Jacob Bernoulli contribuyó con la comprensión de las probabilidades binomiales (estudiadas a través de los experimentos binomiales o de Bernoulli) y apoyo el desarrollo de la Distribución Binomial.
- Si representamos las probabilidades de un experimento binomial, obtenemos siempre una figura como la que sigue:



- Este gráfico corresponde a la línea 7 del Triángulo de Pascal que usted acaba de obtener: las barras corresponden a los siete lanzamientos de la moneda (cada barra representa un lanzamiento), el número de sellos corresponde al exponente de la opción S observada en la ecuación y la frecuencia es el número obtenido en el Triángulo de Pascal.
- La distribución binomial es discreta (no pueden obtenerse 1.3 caras, por ejemplo) y simétrica. Pero su característica fundamental es ser una representación gráfica de un experimento binomial, en el cual hay repeticiones independientes de un evento aleatorio dicotómico.

SOLUCION DE De Moivre

RELACIÓN ENTRE LA BINOMIAL Y LA CURVA NORMAL

- Debido a que los eventos naturales se comportan (o se supone que se comportan) con ajuste a la familia de las curvas normales, y los eventos de probabilidad se comportan frecuentemente con ajuste a la distribución binomial, constituyó un importante avance para la estadística elaborar la relación teórica y matemática entre ambas curvas.
- El matemático frances Abraham De Moivre (1667-1754) desarrolló el teorema o solución que lleva su nombre, también llamado teorema de Laplace-De Moivre.
- Si usted coloca una curva normal sobre una binomial, puede apreciar su similitud aparente. Se requería una solución matemática que permitiera demostrar esta similitud, y reducir una distribución a otra.
- En términos prácticos, la solución De Moivre es lo que nos permite trabajar con la distribución binomial (y con problemas de probabilidad) utilizando las probabilidades asociadas con áreas de la curva normal. Eso nos será muy útil en un futuro cercano.
- Para averiguar más sobre este tema, recomendamos consultar: http://eyeintheskygroup.com/1/00-azar-graficos/normal.htm http://www.sinewton.org/numeros/numeros/67/ideas_01.php